

ŽMOGAUS MIRTINGUMO PRIEŽASČIŲ MATEMATINĖS ANALIZĖS ELEMENTAI

PAULIUS MIŠKINIS, VAIDA VALUNTAITĖ, JOVITA DAMAUSKAITĖ

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

Raktažodžiai: *mirtingumo priežastys, kraujotakos sistemos ligos, piktybiniai navikai, išorinės priežastys, aproksimuojanti funkcija, diferencialinė lygtis.*

Santrauka

Šiame straipsnyje nagrinėjami žmonių mirtingumo priežasčių rodikliai Europos Sąjungos valstybėse. Nustatytos aproksimuojančios funkcijos, jų parametrai ir atitinkami Pirsono koreliacijos koeficientai, kurių vertės kinta nuo 0,907 iki 0,998, o vidutinė koreliacijos koeficiento reikšmė $r = 0,976 \pm 0,042$. Gauta ketvirtos eilės diferencialinė evoliucinė lygtis, kurios sprendinys yra pasiūlyta funkcijų klasė. Nustatytas sąryšis tarp evoliucinės lygties pradinių sąlygų ir aproksimuojančios funkcijos parametru. Trumpai aptartas matematinio modelio galimas tolimesnis vystymas.

ĮVADAS

Šiuo metu pagrindinis dėmesys skiriamas antropogeniniams poveikiams į gyvus organizmus ir žmogų. Žmonės yra biosferos dalis, taip pat kaip ir bet koks gyvas organizmas. Todėl natūralu, kad žmogus prisitaiko prie išorinės aplinkos. Pavyzdžiui, žmogaus organizmo reakcija į temperatūros poveikį, apšvietimą. Išorinė aplinka nėra tikrai atmosfera ir matoma radiacija, tai ir elektromagnetiniai, gravitaciniai, akustiniai ir seisminiai laukai. Apskritai žmonių sveikatą ir žmogaus organizmo funkcijas veikia ir vidiniai, ir išoriniai veiksniai [1]. Iš visų ligų, kurios labiausiai trumpina žmogaus gyvenimo amžių, galima išskirti tokias: piktybiniai navikai, kraujotakos, kvėpavimo ir virškinimo sistemos ligos [2, 3]. Naudojant 10-tos peržiūros Tarptautinę ligų klasifikaciją yra apskaičiuojami rodikliai pagal atskiras ligas. Tokiu būdu nustatytus rodiklius galima palyginti tarp įvairių šalių ir vienoje šalyje, stebimos jų kitimų tendencijos laike.

Šiuo metu Lietuvoje gyventojų sveikatos būklei apibūdinti dažniausiai naudojami mirtingumo rodikliai. Jiems apskaičiuoti naudojami Respublikos miestuose ir rajonuose vykdomų registrų duomenys. Mirtingumo

rodiklis M – mirusiųjų dėl tam tikrų ligų (priežasčių) skaičius per metus 100 000 gyventojų [4]:

$$M = \frac{\text{mirusiųjų dėl tam tikrų ligų (priežasčių) skaičius per metus}}{\text{vidutinis metinis gyventojų skaičius šalyje}} \cdot 10^5$$

Iki 45–50 metų žmogaus atsparumas ligoms ir sveikatos pakenkimams mažėja palengva, po to imuninė sistema persitvarko dėsningam senėjimo procesui ir organizmo atsparumas pradeda sparčiai mažėti, todėl vyresniojo amžiaus žmonės, kaip ir vaikai bei nėščios moterys, yra priskiriami padidintos rizikos grupei [2].

Tikėtina, kad jaunimas gyvens ilgiau nei anksčiau, nes žmonių gyvenimo trukmės vidurkis Europoje padidėjo ir šiuo metu svyruoja apie 71 metus Latvijoje ir 81 metus Ispanijoje, Prancūzijoje ir Švedijoje. Tačiau dėl eismo įvykių, savižudybių, narkotikų vartojimo ir AIDS jauni europiečiai miršta dažniau nei vyresniojo amžiaus žmonės Europoje [5, 6].

Lietuvos gyventojų mirtingumo pasiskirstymas pagal pagrindines mirčių priežastis jau daugelį metų nesikeičia ir yra panašus į ES šalių pasiskirstymą [7, 8]. Daugiausia (86%) mirties atvejų teko trimis pagrindinėms mirties priežasčių grupėms: kraujotakos sistemos ligoms, piktybiniais navikams ir nelaimingiems atsitikimams, apsinuodijimams, traumoms [9]. Nenatūralių mirčių dalis, kuriai priklauso nelaimingi atsitikimai, apsinuodijimai, traumos, Lietuvoje yra ženkliai didesnė negu ekonomiškai išsivysčiusiose Europos šalyse [4].

Širdies ir kraujagyslių ligos vis dar aktuali problema šiuolaikinėje medicinoje [10, 11]. 2009 m. daugiau nei pusė visų mirusiųjų (55,4 %) mirė nuo kraujotakos sistemos ligų, iš kurių didžioji dalis buvo 65 metų ir vyresnio amžiaus asmenys. 2009 m. nuo piktybinių navikų mirė 19,3 % visų mirusiųjų. Mirtingumo lygis dėl išorinių mirties priežasčių šalyje išlieka aukštas, ypač tarp jauno ir vidutinio amžiaus žmonių. Didžiąją mirtingumo dėl išorinių mirties priežasčių dalį sudaro savižudybės – 27,3 %, transporto įvykiai – 11 %, nukritimai – 8,5 %, atsitiktinis apsinuodijimas alkoholiu – 8,3 %. Nuo 2004 m. Lietuvoje ketvirtoje mirties priežasčių struktūros vietoje įsitvirtina virškinimo sistemos ligos, pakeitusios ilgą laiką šią vietą užėmusias kvėpavimo sistemos ligas.

2009 m. nuo virškinimo sistemos ligų mirė 5,3 % visų mirusiųjų [9].

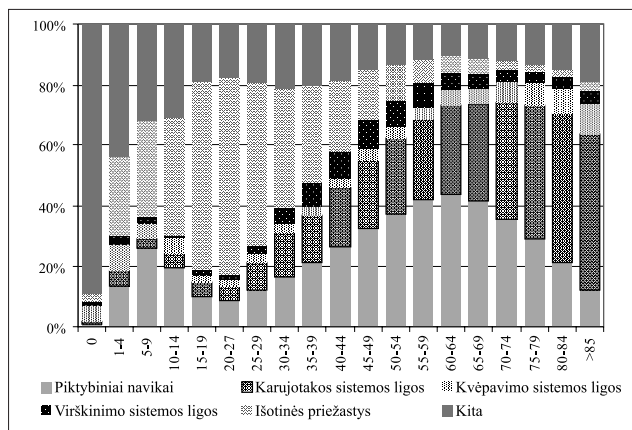
Lietuvos vyrų ir moterų mirtingumas skiriasi ne tik dėl genetinių faktorių, bet ir dėl kai kurių ligų [12, 13, 14]. Vyrų apie penktadalio mirčių priežastis yra traumas ir kitos priverstinės mirtys, o moterų mirtingumas dėl išorinių priežasčių yra apie 6 %. Beveik du trečdaliai moterų mirčių įvyksta dėl kraujotakos sistemos ligų, vyrų mirtingumas dėl šių ligų sudaro mažiau nei pusę visų mirčių. Tačiau Lietuvoje vyrai daug dažniau miršta dėl kvėpavimo sistemos ligų [9].

Šiame straipsnyje nagrinėjami ES ir jos 27 valstybių narių (Airijos, Austrijos, Belgijos, Bulgarijos, Čekijos, Danijos, Didžiosios Britanijos, Estijos, Graikijos, Ispanijos, Italijos, Kipro, Latvijos, Lietuvos, Liuksemburgo, Lenkijos, Maltos, Olandijos, Portugalijos, Prancūzijos, Rumunijos, Slovakijos, Slovėnijos, Suomijos, Švedijos, Vengrijos, Vokietijos) žmonių mirtingumo priežasčių rodikliai.

Darbo tikslas – sukurti žmonių mirtingumo rodiklių matematinį modelį, t. y. nustatyti aproksimuojančias funkcijas ir diferencialinę evoliucinę lygtį bei pradines sąlygas ir sąryšį su pagrindiniais modelio parametrais.

STATISTINIŲ DUOMENŲ APROKSIMACIJA. MATEMATINIS MODELIS

Pirmame paveiksle matoma, kad iš esmės žmonių mirtingumo priežastys atitinkamai amžiaus grupei yra skirtingos. Daugelio daugiau kaip 45 metų žmonių mirtingumo priežastys yra piktybiniai navikai ir kraujotakos bei kvėpavimo sistemos ligos, tuo tarpu jaunimas dažniausiai tampa aukomis dėl išorinių mirties priežasčių, tokių kaip eismo įvykiai,



1 pav. Žmonių mirtingumo priežastys (%) Europoje 2006 m. skirtingoms amžiaus grupėms.

atsitiktiniai nukritimai, savižudybės ar smurtas [15].

Turint statistinius duomenis (1 pav.) svarbu teisingai pasirinkti aproksimuojančių funkcijų klasę. Jei nėra papildomų faktorių (fizinių, cheminių, biologinių), kurie leistų pasirinkti kokybišką funkcijų klasę, paprasčiausia aproksimacija yra polinominė. Tiesinė aproksimacija mūsų atveju yra per grubi. Tačiau aproksimuojant aukštesnio laipsnio polinomais sudėtinga parinkti tinkamą polinomo laipsnį.

“Tais atvejais, kai empirinėms formulėms naudojami polinomi, atsiranda optimalaus polinomo laipsnio problema: mažo laipsnio polinomas pakankamai grubiai apibūdins empirinius duomenis, o aukšto laipsnio polinominis artėjimas, ne eliminuos eksperimento „triukšmą“, t. y. polinomo koeficientai labai priklausys nuo pradinių duomenų paklaidų. Kai polinomo laipsnis bus lygus $N-1$, kur N – statistinių taškų skaičius, tai polinomas idealiai apibūdins visus pradinius duomenis ir pilnai išsaugos visą statistinių duomenų paklaidų įtaką” [16].

Pasirenkant polinomo laipsnį N vadovausimės principu: N turi būti toks, kad užtikrintų minimalų nuokrypį nuo tiesinės priklausomybės. Laikydami, kad laikui t artėjant į begalybę susirgimų skaičius $N(t)$ turi artėti į nulį, aproksimuojančių funkcijų klasę apibūdinsime formule:

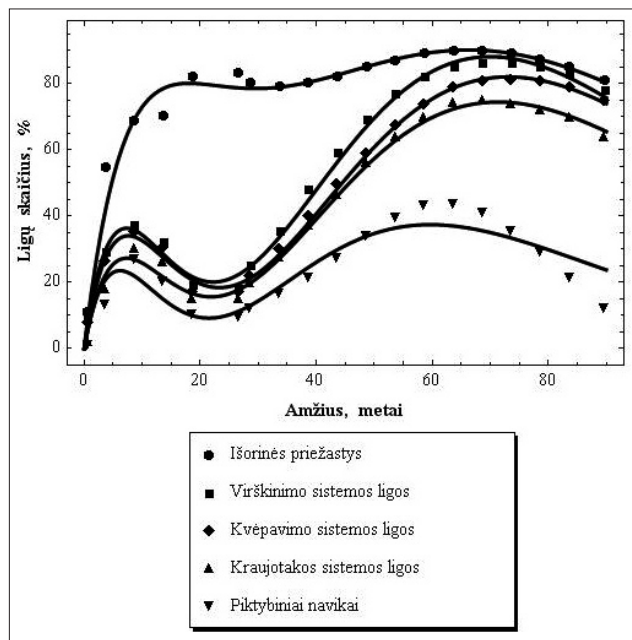
$$N(t) = N_0 (at^3 - bt^2 + ct + 1)e^{-kt} \quad (1)$$

Iš (1) formulės seka, kad koeficientų a , b , c , k dimensijos yra: $[a] = T^{-3}$; $[b] = T^{-2}$; $[c] = [k] = T^{-1}$, čia T yra laiko matavimo vienetas. Ženklas „-“ prie b koeficiento pasirinktas dėl patogumo, kad $-b$ koeficiento reikšmės būtų teigiamos. Parametras k yra natūralus laiko pasirinkimo mastelis, pvz., mūsų atveju (metai) $^{-1}$. Vietinė reikšmė prie mažiausio polinomo laipsnio leidžia interpretuoti parametą N_0 , kai pradinė reikšmė lygi $N_0 = N(0)$.

Naudojant kompiuterinę programą *Matematica v.7.0*

I lentelė. Aproksimuojančios funkcijos parametų ir Pirsono koreliacijos koeficientų reikšmės.

Liga	$N_0 \cdot 10^{-4}$	$a \cdot 10$	$b \cdot 10^3$	$c \cdot 10^4$	$k \cdot 10^{-2}$	r
Piktybiniai navikai	5,98	3,17	1,31	1,64	6,52	0,907
Kraujotakos sistemos ligos	6,14	2,64	1,13	1,58	5,20	0,995
Kvėpavimo sistemos ligos	10,06	1,67	0,76	1,10	5,12	0,998
Virškinimo sistemos ligos	14,64	1,46	0,63	0,89	5,34	0,998
Išorinės priežastys	61,60	0,15	0,07	0,24	4,50	0,983



2 pav. Statistinių mirtingumo priežasčių duomenų (simboliai) ir aproksimuojančių funkcijų (linija) palyginimas.

(licencija L2990-7548) apskaičiuojame aproksimuojančių funkcijų parametrus ir koreliacijos koeficientus r . Jų dydžiai pateikti 1 lentelėje.

Pirmoje lentelėje matoma, kad parametras k kinta mažiausiai. Jo mažą pokytį galima interpretuoti kaip skirtingų susirgimų biologinio laiko mastelio vieningumą. Šiek tiek skiriasi tik išorinių priežasčių k koeficientas. Aproksimuojančių funkcijų šeimą iš esmės sudaro likusieji parametrai N_0 , a , b , c . Koeficiento N_0 reikšmę galima interpretuoti kaip įgimtų ligų skaičių. Pirono koreliacijos koeficientai pakankamai dideli, o tai rodo gerą statistinių duomenų aproksimaciją. Jų vertės kinta nuo 0,907 iki 0,998: (vidutinė koreliacijos koeficiento reikšmė – 0,976±0,042). Kaip ir buvo galima tikėtis mažiausias koreliacijos koeficientas 0,907 nustatytas navikų atveju.

Turėdami aproksimuojančių funkcijų klasę, statistinius mirtingumo priežasčių duomenis galima palyginti su aproksimuojančios funkcijos parametru reikšmėmis (1 lentelė). Palyginimas pateiktas 2 paveiksle.

Dažnas statistinių duomenų apdorojimo atvejis, kai aproksimuojančių funkcijų nustatymas sudaro statistinių duomenų analizės pabaigą. Pabandykime iškelti sau didesnį uždavinį ir nustatyti diferencialinę lygtį bei pradines sąlygas, kurios sprendiniu būtų aproksimuojanti funkcija. Tikslas – sudaryti mirtingumo priežasčių dinamikos matematinį modelį.

Deja, neturime papildomos nematematinio pobūdžio informacijos, padedančios kurti šį modelį. Atsižvelgdami į netiesinį ir nemonotonį mirtingumo dinamikos pobūdį, šią dinamiką galime modeliuoti nebūtinai antros eilės diferencialine lygtimi.

Pastebėsime, kad n -kartinis (1) funkcijos diferencijavimas duoda tik keturias tiesiškai nepriklausomas funkcijas. Tai reiškia, kad bet kokios keturios tiesiškai nepriklausomos funkcijos sudaro aproksimuojančių funkcijų bazę. Šiuo atveju diferencialinė evoliucinė lygtis bus tokia:

$$N^{IV} + 4kN^{III} + 6k^2N^{II} + 4k^3N^I + k^4N = 0 \quad (2)$$

čia $N = N(t)$ ir N^l – išvestinė laiko atžvilgiu esant pradinėms sąlygoms Koši formoje:

$$N_0 = N(0); \quad N'_0 = N'(0); \quad N''_0 = N''(0); \quad N'''_0 = N'''(0); \quad (3)$$

čia N_0 – pradinis ligų skaičius, N'_0 – pradinio ligų skaičiaus greičio pokytis, N''_0 ir N'''_0 – antrosios ir trečiosios eilės pradinio ligų skaičiaus išvestinės. Mirtingumo priežasčių dinamikos matematinį modelį sudaro (2) evoliucinė lygtis esant (3) pradinėms sąlygoms ir (1) sprendiniui.

Įstačius (1) funkciją į (2) lygtį galima įsitikinti, kad (1) funkcija yra (2) diferencialinės lygties sprendinys. Atkreipsime dėmesį, kad koeficientai (2) diferencialinėje lygtyje priklauso tik nuo biologinio laiko mastelio k pasirinkimo. Žinant, kad $N_0 = N(0)$, gauname, kad parametrai a , b ir c yra glaudžiai susiję su (3) pradinėmis sąlygomis:

$$\begin{cases} N^I_0 = N_0(c-k); \\ N^{II}_0 = N_0(2b-2ck+k^2); \\ N^{III}_0 = N_0(6a-6bk+3ck^2-k^3). \end{cases} \quad (4)$$

Į (4) sistemą įstačius pradines sąlygas, parametrai a , b , c sprendžiant gali būti išreikšti:

$$\begin{cases} a = [N^{III}(0) + 3kN^{II}(0) + 3k^2N^I(0) + k^3N(0)] / 6N(0); \\ b = [N^{II}(0) + 2kN^I(0) + k^2N(0)] / 2N(0); \\ c = [N^I(0) + kN(0)] / N(0), \end{cases} \quad (5)$$

Matome, kad (1) formulėje aproksimuojančių funkcijų parametrai gali būti išreikšti per (2) evoliucinės lygties (3) pradines sąlygas.

IŠVADOS

1. Gautos funkcijos leidžia atlikti interpoliaciją ir ekstrapoliaciją nustatant mirtingumo priežastis ne tik tais žmogaus gyvenimo momentais, kai buvo atliktas mirtingumo monitoringas, taip pat ir bet koku laiko momentu tiriamoje amžiaus grupėje bei už jos ribų.

2. Galima parodyti, kad nelyginiai diferencialinės evoliucinės lygties nariai susieti su „energijos išskaidymu“, pvz., ketvirtosios eilės (2) evoliucinėje lygtyje nariai su pirmąją ir trečiąją išvestinėmis turi dispacinį pobūdį. Tai reiškia, kad keičiant (2) diferencialinėje lygtyje narių koeficientus galima nustatyti kokybinį aproksimuojančių funkcijų pokytį.

3. Diferencialinė evoliucinė lygtis gali būti suvesta į dviejų susijusių antros eilės diferencialinių lygčių sistemą, tačiau parametų skaičius joje nesumažės.

4. Turėdami duomenis apie žmonių mirtingumo priežasčių pasiskirstymą skirtingoms epochoms galėtume kurti detalesnę modelį, kurio diferencialinė lygtis būtų išreikšta dalinėmis išvestinėmis. Sudarytas matematinis modelis leistų numatyti ir prognozuoti mirtingumo priežasčių dinamikos tendencijas.

Literatūra

1. Belous O., Žukauskaite A. Sustainability indicators and city mortality rate. *Sveikatos mokslai*, 2008; 2: 1623–1628.
2. WHO (World Health Organization). Global health risks: mortality and burden of disease attributable to selected major risks. World Health Organization, Geneva 2009; 63.
3. McMichael AJ, Campbell-Lendrum D, Kovats S, Edwards S, Wilkinson P, Wilson T et al. Global Climate Change. In: Ezzati M, Lopez A, Rodgers A, Murray CJL, eds. Comparative quantification of health risks: global and regional burden of disease attributable to selected major risk factors. Geneva, World Health Organization, 2004: 1543–1650.
4. Gražulevičienė R. Aplinkos epidemiologija ir rizikos sveikatai vertinimas. Vytauto Didžiojo universiteto leidykla, Kaunas, 2005; 291.
5. OECD. Health at a Glance: Europe 2010. OECD Publishing, Paris, 2010; 128.
6. Jiaquan Xu, M.D.; Kenneth D. Kochanek, M.A.; Sherry L. Murphy, B.S.; and Betzaida Tejada-Vera, B.S.; Division of Vital Statistics. Deaths: Final Data for 2007. *National Vital Statistics Reports*. 2010; 58(19): 136.
7. Lopez A. Causes of death: an assessment of global patterns of mortality around 1985. *World health statistics quarterly* 1990; 43: 91-104.
8. Mackenbach J P, van Duyne W M, Kelson M C. Certification and coding of two underlying causes of death in the Netherlands and other countries of the European Community. *Journal of Epidemiology and Community Health*, 1987; 41: 156-160.

9. Gaidelytė R., Želviene A., Jaselionienė J. Lietuvos sveikatos statistika 2009. Lietuvos sveikatos apsaugos ministerijos Higienos instituto Sveikatos informacijos centras, Vilnius, 2010; 69.

10. Russell M A, Dobson A J. Age-specific patterns of mortality from cardiovascular disease and other major causes, 1960 to 1990. *Australian Journal of Public Health*, 1994; 18(2): 160–164.

11. Dimitrova S. Geomagnetic indices variations and human physiology. *Sun and Geosphere*, 2007; 2(2): 84–87.

12. Waldron I. Sex differences in human mortality: the role of genetic factors. *Social Science and Medicine* 1983; 17(6): 321–33.

13. Lang E, Arnold F, Kupfer P. Women live longer – biological, medical and sociologic causes. *Zeitschrift für Gerontologie*, 1994; 27(1): 10–5.

14. Kruger D J, Nesse R M. Sexual selection and the male: female mortality ratio. *Evolutionary Psychology*, 2004; 2: 66–85.

15. Eurostat (European Commission). Youth in Europe. A statistical portrait. 2009 edition. Publications Office of the European Union, Luxembourg; 2009; 184.

16. Румшицкий Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента, Наука, Москва. 1971; 192.

ELEMENTS OF THE MATHEMATICAL ANALYSIS OF HUMAN MORTALITY CAUSES

Paulius Miškinis, Vaida Valuntaite, Jovita Damauskaitė
Summary

Key words: Causes of death, Neoplasm diseases, Circulatory diseases, Respiratory diseases, Digestive diseases, Approximation function, Differential equation

The paper deals with the analysis of indices of human mortality causes in the EU member states. The analytical approximating functions, their parameters and the corresponding Pearson's correlation coefficients varying between 0,907 and 0,998 (mean $r = 0,976 \pm 0,042$) have been found. An evolutionary 4th-order ordinary differential equation has been obtained, the proposed class of functions being its solutions. A correlation between the initial conditions of the evolutionary equation and parameters of the approximating function is determined. The possible further development of this model is briefly discussed.

Correspondence to: Vaida.Valuntaite@vgtu.lt

Gauta 2011-01-31

